

Ljusets Diffraction 2018

Laborationsinstruktioner **Våglära och optik FAFF30+40**

Samuel Bengtsson: samuel.bengtsson@fysik.lth.se

Ludvig Hassbring: tfy15lha@student.lu.se

Lärandemål

I den här laborationen får Du använda samma utrustning som du lärde dig använda i Optik laborationen till att studera olika former av diffraktion och interferens. Du kommer också att simulera fenomenen i MATLAB.

Laborationen kopplar framförallt till följande lärandemål i kursplanen:

Syfte

Syftet med kursen är att utveckla studentens problemlösningsförmåga och modelltänkande samt introducera studenten till experimentellt arbete inklusive användning av datorstöd för att grafiskt representera och analysera data. Kursen behandlar vågor och vågors rörelse i tid och rum med tonvikt på elektromagnetisk strålning i det optiska området. Elektromagnetiska vågor och deras utbredning är ett centralt begrepp inom dagens teknologi, men också för den kvantmekaniska beskrivningen av mikrokosmos. Kursen ger en grund för att förstå och utveckla både tekniken omkring oss och den moderna fysiken.

Mål

Kunskap och förståelse

För godkänd kurs skall studenten

- kunna de grundläggande fysikaliska principerna för vågutbredning,
- förstå hur ett abstrakt modelltänkande i form av matematiska modeller, analogier och bilder relaterar till experiment och den fysikaliska verkligheten,
- kunna analysera problemställningar samt utföra och tolka beräkningar inom ämnesområdet.

Färdighet och förmåga

För godkänd kurs skall studenten

- ha tillägnat sig förmåga att genomföra laborationer och använda datorer som hjälpmedel, särskilt för beräkningar, analys och simulering,
- ha tillägnat sig grundläggande färdighet i skriftlig framställning av observationer och beräkningar samt ha ökad förmåga att diskutera fysikaliska problem med kollegor,
- kunna angripa problemställningar på ett strukturerat sätt.

Värderingsförmåga och förhållningssätt

För godkänd kurs skall studenten

- visa insikt i den naturvetenskapliga metoden och fysikens möjligheter och begränsningar,
- kunna värdera utfall av olika experimentella metoder,
- visa förmåga att identifiera sitt behov av ytterligare kunskaper även inom andra områden.

Introduktion

1.1 Att läsa

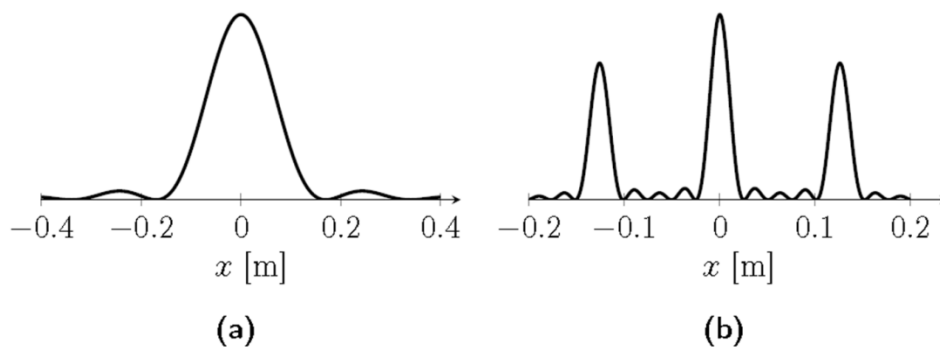
- Riskbedömning – finns på Live@Lund under Laborationer
- Hela handledningen (försök fundera ut hur Du skall utföra alla moment)
- Pedrotti
 - Vågor: 4-1–4-8
 - Vågaddition: 5-1–5-2
 - Diffraction
 - Fraunhofer: kap. 11
 - Fresnel: kap. 13
 - Extraläsning (kursivt)
 - Fourieranalys: 9-1–9-2
 - Fourieroptik: 21-1 (s. 458–461)

1.2 Riskanalys

I denna laboration kommer Du att använda en laser av klass 3B som är inställd på en effekt som är mindre än 5 mW. Effekten är begränsad för att undvika permanent skada på ögonen om Du tittar direkt in i laserstrålen eller får en reflex. Även om effekten är begränsad kan det vara mycket obehagligt att få en stråle i ögonen och det är därför viktigt att Du alltid har Ditt huvud ovanför strålhöjden, använder skärmarna till att blockera eventuella reflexer och att Du tar av Din klocka.

2 Förberedelseuppgifter

1. Experimentera med MATLAB-demos (se appendix C).
2. Beräkna bredden av den spalt som ger upphov till intensitetsfördelningen i figur 1a. Avståndet till skärmen är 7,00 m och laservåglängden 546,1 nm.
3. I figur 1b syns intensitetsfördelningen på en skärm placerad 10,0 m bort från ett flerspaltssystem. Lasern har våglängden 632,8 nm.
 - a. Hur många spalter har belysts?
 - b. Hur stort är avståndet mellan spalterna?
 - c. Vad händer med intensitetsfördelningen om en av ytterspalterna täcks över? Skissa!
 - d. Hur mycket lägre blir centraltoppen jämfört med om alla spalterna belyses?



Figur 1. Intensitetsfördelningen på skärmen för två olika spaltssystem

3 Teori

Läs igenom allt nedan, men var inte orolig om Du inte förstår allt; delar av matematiken har Du ännu inte läst. Handledaren kommer göra sitt bästa under laborationen för att Du skall få en aning om hur matematiken för vågekvationen hänger ihop med de fenomen Du skall studera under laborationen.

3.1 Vågekvationen

Börja med den homogena vågekvationen i 3 dimensioner:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \nabla^2\right) u = 0 \quad (1)$$

Sätt $c = 1$. Ansats $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r})T(t)$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{\nabla^2 A}{A} = -k^2.$$

Denna separation leder till *Helmholtz ekvation*:

$$(\nabla^2 + k^2)A = 0, \quad \omega \equiv k \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right)T = 0. \quad (2)$$

Tidsdelen har den harmoniska lösningen:

$$T(t) = \exp(-i\omega t).$$

Om man har en punktkälla i origo, kan man skriva om Helmholtz ekvation på en radiellt symmetrisk form:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)A = \delta(\mathbf{r}),$$

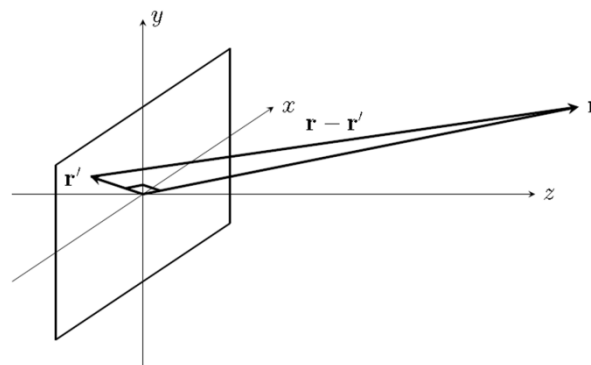
och man kan visa att ekvationen har lösningen

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \quad (3)$$

Med ett ändligt antal källor på positionerna $\mathbf{r}'_i$ med amplituderna $f_i = f(\mathbf{r}'_i)$ för $i \in [1..N]$, kan det elektromagnetiska fältet på positionen $\mathbf{r}$ skrivas

$$A(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N f_i \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i|} \rightarrow \int d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{r}') \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (4)$$

Detta kallas för *Huygens princip*. Övergången till en integral sker när vi vill beskriva en kontinuerlig källa istället för flera diskreta.



Figur 2. Typisk situation för vilken ekvation (4) beräknas. $\mathbf{r}'$ löper över ett plan där aperturen finns och $\mathbf{r}$ är den punkt på skärmen där vi vill räkna ut diffraktionsmönstret.

3.2 Diffraktion

När man summerar över de diskreta källorna $\{f_i\}$, eller integrerar över den kontinuerliga källan $f(\mathbf{r})$ i ekvation (4), kommer resultatet bli ett interferensmönster. Integralen i (4) är komplicerad att lösa, men vi kommer att se två fall där man kan förenkla den. När *Fresneltalet* $F \equiv d^2/(\lambda l) \gtrsim 1$ (där d^2 är storleken på det belysta objektet, l avståndet mellan objekt och skärm och λ ljusets våglängd) befinner vi oss i *Fresnelregimen* och när $F \ll 1$ befinner vi oss i *Fraunhoferregimen*.

3.2.1 Fresneldiffraktion

Nära diffraktionskällan är vågfronternas krökning viktiga för att beräknas interferens korrekt. Med hjälp av de så kallade *Fresnelzonerna* kan bygga upp en analytisk approximation, som i kapitel 13 i Pedrotti. För till exempel fallet med en rak kant, måste man beräkna *Fresnelintegralerna*, vilket lättast görs med en dator.

3.2.2 Fraunhoferdiffraktion

Om vi tänker oss att $f(\mathbf{r}')$ är kompakt runt origo och vi endast är intresserade av lösningar långt borta (i det så kallade fjärrfältet, där Fraunhoferdiffractionen råder) kan vi, eftersom $r' = |\mathbf{r}'|$ är litet i förhållande till $r = |\mathbf{r}|$, skriva

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = r|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta \Leftrightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r \cos \theta} = \frac{r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{\cos \theta} \approx r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

$$\Rightarrow A(\mathbf{r}) \approx \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \frac{\exp[ik(r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')] }{4\pi(r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')}$$

Om $[\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \ll r]$ kan vi göra följande approximation

$$A(\mathbf{r}) \approx \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')$$

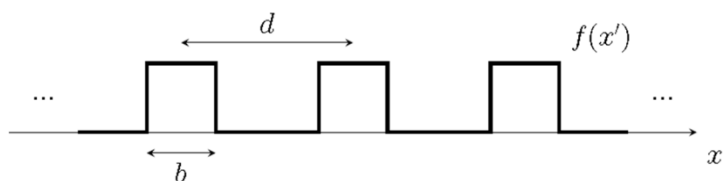
Om vi dessutom definierar $[\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{r}}]$ får vi

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'). \quad (5)$$

Tänk på att det som syns på skärmen är inte fältet i sig, utan intensiteten:

$$I(\mathbf{r}) \propto |A(\mathbf{r})|^2 \quad (6)$$

Ekvation (5) är giltig i Fraunhoferregimen för godtyckliga objekt. För den typ av flerspaltssystem vi kommer att stöta på under laborationen, ser ett tvärsnitt $f(x')$ genom spaltssystemet ut som



där b är spaltbredden hos varje enskild spalt och d spaltavståndet. För ett sådant spaltssystem kan ekvation (5) beräknas exakt, och diffraktionsmönstret får utseendet

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)^2, \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta, \quad \gamma = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (7)$$

där N är antalet spalter. Böjningsminima ges av $b \sin \theta = m\lambda$ och interferensmaxima av $d \sin \theta = n\lambda$. Typiska plottar av ekvation (7) syns i figurerna 1a och 1b.

3.2.3 Fouriertransform – översikt för den intresserade

Alla periodiska funktioner kan utvecklas i en (möjligtvis oändlig) serie av harmoniska funktioner, en så kallad *Fourierserie*:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \exp(i2\pi nx), \hat{f}_n = \int_0^1 dx f(x) \exp(-i2\pi nx)$$

Jämför särskilt med den första MATLAB-demonstrationen, där Du adderade sinusvågor av olika frekvenser.

För att serien skall vara konvergent, måste sekvensen $\{\hat{f}_n\}$ vara avtagande. Mer generella funktioner (icke-periodiska) kan hanteras genom att ett kontinuerligt spektrum används för att bygga upp funktionen

$$f(x) = \int \frac{d\xi}{2\pi} \hat{f}(\xi) \exp(i\xi x) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)].$$

Detta är den inversa *Fouriertransformen*. Fouriertransformen som avbildar från rummet till fasrummet (eller frekvensrummet) är då definierad som

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)] \equiv \int dx f(x) \exp(-i\xi x).$$

På samma sätt är den tredimensionella Fouriertransformen definierad som

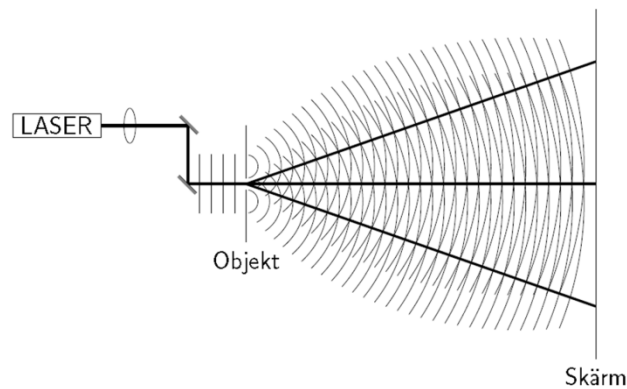
$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[f(\mathbf{r})] \equiv \int d^3r f(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$

Detta är precis integralen i (5).

Fouriertransform kan lätt beräknas med hjälp av en dator, se datordelen nedan.

4 Praktisk del

4.1 Fraunhoferdiffraction

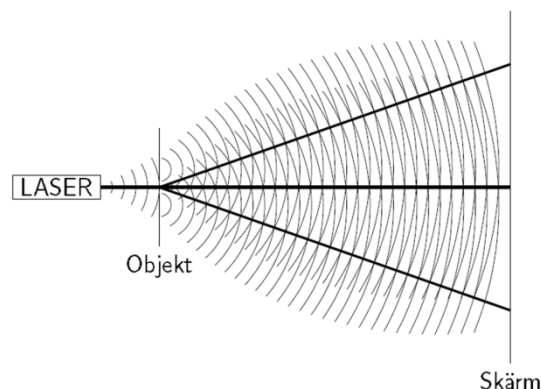


Figur 3. Experimentuppställningen som används under laborationen för att studera Fraunhoferdiffraction. Lasern kollimeras först och de plana vågfronterna passerar aperturen där de böjs av och propagerar till skärmen där vi detekterar dem.

Börja med att linjera och kollimera strålen. Varför behöver Du göra det?

1. Bestäm avståndet till skärmen med hjälp av en dubbelspalt. Behåll detta avstånd fixerat under resten av laborationen.
2. Bestäm bredden på en enkelspalt.
3. Jämför diffraktionsmönstret från en enkelspalt med det från en tråd.
4. Bevisa Babinetets princip.
5. Bestäm spaltavståndet i ett flerspaltssystem. Fundera på effekten av att ha mer än en spalt.
6. Undersök effekten av en ställbar spalt och bestäm dennas bredd interferometriskt för fem olika inställningar.

4.2 Fresneldiffraction



Figur 4: Experimentuppställningen som används under laborationen för att studera Fresneldiffraction.

Ta bort speglar och lins så att Du har en divergent ljusstråle igen. Varför skall du göra det?

1. Belys en cirkel — kan Du se Aragos/Poissons fläck?
2. Belys en ställbar spalt — vad händer med interferensmönstret om Du ändrar spaltbredden?
3. Studera diffraction från en egg.

A Diioddata

S/N	Våglängd	LD	PD	Polaritet	Min	Rekommenderat	Max
120501–55	405,0 nm	CG	CG	CG	20 mA 0,5 mW	37 mA 5 mW	48,3 mA 10,5 mW
130201–56	403,9 nm	CG	CG	CG	20 mA 0,8 mW	38 mA 5 mW	60 mA 10 mW
130201–57	403,4 nm	CG	CG	CG	20 mA 0,5 mW	31 mA 5 mW	42,5 mA 10 mW
130201–67	640,5 nm	AG	CG	AG	60 mA 1,5 mW	65 mA 5 mW	100 mA 17 mW
130201–68	641,3 nm	AG	CG	AG	60 mA 1,5 mW	70 mA 5 mW	100 mA 15,5 mW

B Rapport

Rapporten skall skickas in i pdf-format via email inom en vecka efter utförd laboration. Lämpligtvis består den av följande delar:

1. Inledning
2. Teori
3. Material och metod
4. Resultat
5. Diskussion

Givetvis är Du välkommen att via mail fråga handledaren om Du undrar något.

C Matlab-demos

Matlab finns på alla datorer i Fys:Curie, i alla datorsalar i E-huset och Mattehuset. Skulle Du ha problem, kan säkert någon handledare på programmeringskursen hjälpa Dig. Alternativt kan Du ladda ned Matlab gratis från <http://program.ddg.lth.se/>.

Skripten finns tillgängliga på kursens hemsida.