

Mätfelsbehandling

Lars Engström

I alla fysikaliska försök har de värden man erhåller mer eller mindre hög noggrannhet. Ibland är **osäkerheten** i en mätning fullständigt försumbar i förhållande till den precision man vill ha. Andra gånger kan mätosäkerheten vara så stort att resultatet blir helt ointressant. Det gäller alltså att veta vilken osäkerhet man har hos sina mätdata samt vilken noggrannhet man behöver hos resultatet. I stället för mätosäkerhet talar man ofta om **mätfel**. I detta sammanhang betyder alltså mätfel inte att man gjort något direkt fel utan att det alltid finns en osäkerhet, ett fel i alla mätningar.

Mätfel brukar delas in i två grupper: **tillfälliga fel** och **systematiska fel**. Låt oss förklara skillnaden med ett exempel.

Ett brev läggs 13 gånger på en mekanisk brevvåg. Varje gång avläses vikten och vi får följande resultat:

18, 19, 18, 17, 20, 18, 19, 18, 18, 19, 17 och 18 gram.

Den spridning av mätvärdena som man får kan bl.a. bero på brevets placering på vågskålen, tröghet i det mekaniska systemet, dålig avläsning av skalan, osv. Sådana **tillfälliga fel** uppträder slumpmässigt och kan därför behandlas statistiskt. Genom att beräkna ett **medelvärde** får man en bättre uppskattning av brevets vikt än om man använder ett enskilt mätvärde. För att få en uppfattning om hur mätvärdena sprider sig kan man ange **standardavvikelsen**. Standardavvikelsen blir alltså en uppskattning av osäkerheten/felet i en **enskild** mätning.

Nu kan det tyvärr hända att brevet inte alls väger runt 18 gram. Förslitning kan ha gjort att utslaget inte stämmer med skalstrecken. Vågen kanske inte var nollställd eller man gjorde avläsningarna snett i förhållande till skalan. Denna typ av **systematiska fel** är förödande eftersom de inte försvinner då man bildar medelvärden. Naturligtvis skall man i första hand försöka eliminera de systematiska felen i en försöksuppställning. Att göra en uppskattning av systematiska fel kräver ofta både erfarenhet och stora fysikkunskaper och kan många gånger vara mer tidskrävande än den aktuella mätningen!

Medelvärde och standardavvikelse

Om $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ är de enskilda mätvärdena, beräknar man det **aritmetiska medelvärdet** av mätserien $\langle x \rangle$ på följande sätt:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Standardavvikelsen, s , för mätserien definieras som

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Notera att både $\langle x \rangle$ och s får samma enhet som x . Låt oss beräkna medelvärdet och standardavvikelsen för vår mätserie ovan. Vi får

$$\langle m \rangle = 18,2 \text{ g och } s = 0,83 \text{ g.}$$

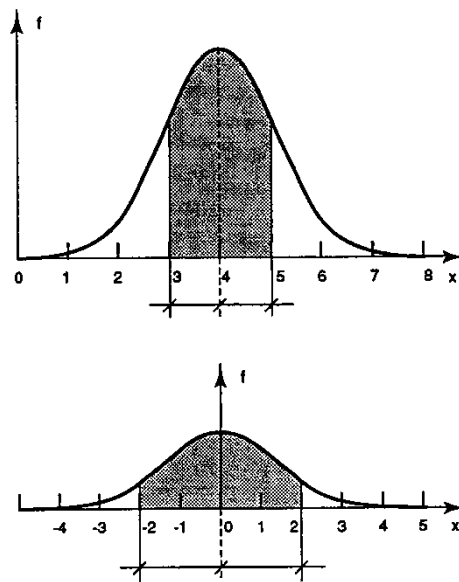
Normalfördelningen

Antag att vi upprepade vägningen av brevet ett mycket stort antal gånger. Ett diagram där antalet gånger vi får en viss massa (eller hamnar inom ett litet intervall kring en viss massa) avsätts mot massan blir den välkända **normalfördelningen**, som visas i Figur 1, och som matematiskt beskrivs av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

där $f(x)dx$ tolkas som sannolikheten att få ett värde i intervallet dx kring x och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$



Figur 1. Två normalfördelningskurvor $N(4, 1)$ och $N(0, 2)$. Det streckade området mellan $\bar{x} \pm \sigma$ motsvarar 68 % av fördelningen.

Normalfördelningen är symmetrisk kring det mest sannolika värdet (väntevärdet) $\bar{x}$ och har en bredd som beskrivs av σ (standardavvikelsen). Normalfördelningen betecknas ofta $N(\bar{x}, \sigma)$. I de flesta experimentella situationer beskriver man emellertid linjebredder genom att ange *FWHM* ("Full Width at Half Maximum" eller "hela bredden på halva höjden") För normalfördelningen blir sambandet:

$$FWHM = 2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \ln(2)}.$$

Från experimentella mätningar $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ kan vi **uppskatta** $\bar{x}$ med $\langle x \rangle$ och σ med s .

Här gäller det att ha begreppen klara för sig, eftersom vi använder orden medelvärde och standardavvikelse i 2 betydelser med olika beteckningar! Vår experimentella storhet X har en statistisk fördelning, t.ex. normalfördelningen, med ett okänt "sant" medelvärde $\bar{x}$ och en likaledes okänd "sann" standardavvikelse σ . Det enda vi kan göra är att via mätningar uppskatta dessa storheter genom att beräkna medelvärden och standardavvikelse från vår mätserie, $\langle x \rangle$ och s . På engelska är man ofta tydligare genom att, i det senare fallet, tala om "sample mean" respektive "sample standard

deviation".

I vårt exempel med brevet kan vi alltså uppskatta sannolikheten att **en** vägning ger ett visst resultat från en normalfördelning med väntevärdet 18,2 g och standardavvikelsen 0,83 g. Det innebär bl.a. att sannolikheten är 68 % att få ett resultat mellan 18,2 - 0,83 och 18,2 + 0,83 dvs mellan 17,4 och 19,0 g.

Feluppskattning på laborationer

Genom att göra långa mätserier kan man få en bra **skattning** av väntevärden och standardavvikelser. På laborationerna har Du dock ofta inte tid att mäta mer än en gång. I andra sammanhang kan experimenten vara så tidskrävande och dyrbara att man bara kan mäta en eller högst ett fåtal gånger. Vad gör man då? Jo, Du får försöka uppskatta osäkerheten i din enda mätning. Använder Du linjal för att mäta en sträcka är osäkerheten säkert 0,2 - 0,5 mm. Vågar kan vara märkta från ± 1 kg ner till $\pm 0,0005$ g. Elektriska multimetrar kan ha osäkerheten angivet som ett visst antal procent av fullt utslag, osv. Det går alltid att åstadkomma någon form av feluppskattning även hos ett enstaka mätvärde. Därefter får Du använda feluppskattningen istället för standardavvikelsen. För att skilja feluppskattningar från standardavvikelser använder vi beteckningar av typen Δx istället för s eller σ .

Felfortplantning

Hittills har vi bara diskuterat statistiken kring en variabel (t.ex. massan av ett brev) men den vanligaste situationen är att den intressanta storheten är en funktion av flera mätbara variabler

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N).$$

Vi kan t.ex. vilja ha en feluppskattning av densiteten (ρ) av vårt brev från uppmätta värden på massan (m) och volymen (V), $\rho = m/V$, eller bestämma osäkerheten i spaltvidden (b) från en mätning av diffraktionsvinkeln (θ) och våglängden λ , $b = \lambda/\sin(\theta)$. Vi diskuterar 2 fall, dels en linjärkombination av normalfördelade variabler och dels fallet ovan med en godtycklig funktion f .

Linjärkombination av normalfördelade variabler

Om $Y = \sum_{i=1}^N a_i X_i$ där X_i är **oberoende** normalfördelade variabler, $X_i \in N(\bar{X}_i, \sigma_i)$, och a_i konstant så gäller att också Y är normalfördelad och

$$Y \in N(\bar{Y}, \sigma_y) \text{ där } \bar{Y} = \sum_{i=1}^N a_i \bar{X}_i \text{ och } \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2 \sigma_i^2$$

Exempel 1: Summa

Om $X_1 \in N(\bar{X}_1, \sigma_1)$ och $X_2 \in N(\bar{X}_2, \sigma_2)$ så skattar vi osäkerheten i $Y = X_1 + X_2$ med

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Exempel 2: Aritmetiskt medelvärde

I vår tidigare diskussion såg vi att osäkerheten i **en** mätning av vikten av brevet kunde uppskattas med den experimentella standardavvikelsen $s = 0,83$ g. Vad blir osäkerheten i medelvärdet av vikterna?

$$\langle m \rangle = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} m_i \text{ där } m_i \in N(18,2, 0,83)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{13} \sqrt{\sum_{i=1}^{13} 0,83^2} = \frac{0,83}{\sqrt{13}} = 0,23$$

Därför anger vi brevets massa som $m = (18,2 \pm 0,2)$ g

Detta är det vanligaste sättet att ange mätvärdena på. Notera dock att sannolikheten för att massan ligger utanför de angivna gränserna är hela 32% ! Det är alltså viktigt att komma ihåg att en standardavvikelses feluppskattning verkligen inte betyder att det riktiga värdet måste ligga inom de angivna felgränserna. Om man i stället anger gränserna som ± 2 standardavvikelser så är sannolikheten ca. 95% att intervallet innehåller det rätta värdet.

Notera det viktiga resultatet att osäkerheten i medelvärdet minskar som $1/\sqrt{n}$ när antalet mätningar ökar. Att osäkerheten bör minska med fler mätningar är väl ganska intuitivt men vi ser också att det är ”dyrbart”, en förbättring med en faktor 10 kostar 100 nya mätningar.

Godtycklig funktion f

Det vanligaste fallet i fysik är att den sökta storheten kan skrivas som en allmän funktion av ett antal mätbara storheter:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Om f är en icke-linjär funktion är det mycket svårt att exakt bestämma en uppskattning av felet i Y från givna feluppskattningar ΔX_i i X_i . Vi ska i stället alltid använda en approximationsformel som härrör från Gauss. Genom att Taylorutveckla funktionen runt $X_i = \bar{X}_i$ kan man visa att om variablerna X_i är **oberoende** så gäller **approximativt**:

$$(\Delta Y)^2 = (\Delta X_1)^2 \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right)^2 + (\Delta X_2)^2 \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right)^2 + \dots + (\Delta X_N)^2 \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial X_N}\right)^2$$

Detta är ett mycket användbart resultat, som Du säkert kommer att ha nytta av i många situationer. Observera att det är en approximation, vars noggrannhet är bättre ju mer linjär f är inom de områden där X_i ligger, dvs för $X_i \in [X_i - \Delta X_i, X_i + \Delta X_i]$. Om f är exakt linjär ger formeln samma resultat som för linjärkombinationen ovan. Vi illustrerar resultatet med ett antal exempel.

Exempel 3: Areal av en cirkel

Areal av en cirkel är $A = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2$. Du mäter diametern (d) till 10,2 cm. Beräkna arean och ange en feluppskattning.

Lösning

Först uppskattar vi felet i mätningen av diametern. Antag att vi mäter med en vanlig linjal, då bör vi säkert kunna mäta inom $\pm 0,5$ mm. Om vi nu avser att feluppskattningen i arean ska tolkas som 1 standardavvikelse, dvs det traditionella sättet att ange fel, måste vi också använda 1 standardavvikelse i mätningen av d som Δd . Eftersom vi **säkert** kan mäta inom $\pm 0,5$ mm är $\Delta d = 0,5$ troligen inte 1 utan snarare 2 standardavvikelser, enligt diskussionen i exempel 2. Vi väljer alltså $\Delta d = 0,25$ mm. Observera att detta resonemang nog behövs i de flesta fall (om man ska vara noga), eftersom det är lättare och naturligare att uppskatta de maximala felen i en mätning än att direkt gissa på ett värde där man har 32% sannolikhet att gissa fel.

Felfortplantningsformeln ger nu

$$(\Delta A)^2 = (\Delta d)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\pi \cdot d\right)^2 \Rightarrow \Delta A = \frac{1}{2}\pi \cdot d \cdot \Delta d = 0,48 \text{ cm}^2$$

Svar: Areal av cirkeln är $(81,7 \pm 0,5) \text{ cm}^2$, där feluppskattningen avser 1 standardavvikelse.

I detta fallet har alltså en mätning av d med ca 3% fel gett en area med ca 6% osäkerhet, vilket naturligtvis kommer sig av att vi måste kvadrera den uppmätta diametern.

Exempel 4: Densitet

Vi vill bestämma densiteten $\rho = \frac{m}{V}$ hos en metallegering. Vi mäter och uppskattar felen (1 standardavvikelse) i massan och volymen: $m = (331 \pm 1) \text{ g}$ och $V = (61,1 \pm 0,6) \text{ cm}^3$. Bestäm densiteten och ange en feluppskattning.

Lösning

Densiteten beräknas till $\rho = 5,417 \text{ g/cm}^3$. Felfortplantningsformeln ger nu

$$\begin{aligned} (\Delta \rho)^2 &= (\Delta m)^2 \cdot \left(\frac{1}{V}\right)^2 + (\Delta V)^2 \cdot \left(-\frac{m}{V^2}\right)^2 = \\ &0,000268 + 0,00283 = 0,0031 \Rightarrow \Delta \rho = 0,056 \end{aligned}$$

Svar: Densiteten är $(5,42 \pm 0,06) \text{ g/cm}^3$, där feluppskattningen avser 1 standardavvikelse.

Här ser vi att ett relativt fel i m på 0,3 % kombinerat med ett fel i V på 0,99 % ger ett totalt uppskattat fel på 1,1 %. När man använder felfortplantningsformeln är det alltid intressant att beräkna och skriva ut varje term för sig innan man summerar eftersom det då tydligt framgår vilken/vilka av de ingående variablerna som bidrar mest till totalfelet. I detta exempel är det uppenbart att om man vill ha bättre noggrannhet i densiteten så ska man först och främst förbättra mätningen av volymen.

Exempel 5: Spaltvidd

Man vill bestämma en spaltvidd b genom att studera diffraktionsmönstret som bildas då spalten belyses med ljus från en He-Ne laser. En skärm placeras på avståndet L från spalten och man mäter upp en sträcka x mellan det femte minimat på ömse sidor om centralmaximat. Resultat: $L = (7,00 \pm 0,01)$ m och $x = (438 \pm 2)$ mm Våglängden är bestämd till $\lambda = (632,82 \pm 0,01)$ nm. Bestäm spaltvidden och ange en feluppskattning.

Lösning

Enligt teorin för Fraunhoferdiffraktion i en enkelspalt gäller att villkoret för minimum i en vinkel θ från spaltnormalen ges av $b \cdot \sin(\theta) = m \cdot \lambda$ där $m = 5$ är ordningen och $\sin(\theta) = x / (2 \cdot L)$.

$$b = \frac{2mL\lambda}{x} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6,3282 \cdot 10^{-7}}{438 \cdot 10^{-3}} = 101,1 \text{ } \mu\text{m}$$

Felfortplantningsformeln ger nu

$$\begin{aligned} (\Delta b)^2 &= (\Delta L)^2 \cdot \left(\frac{2m\lambda}{x}\right)^2 + (\Delta \lambda)^2 \cdot \left(\frac{2mL}{x}\right)^2 + (\Delta x)^2 \cdot \left(-\frac{2mL\lambda}{x^2}\right)^2 = \\ &2,087 \cdot 10^{-14} + 2,554 \cdot 10^{-18} + 1,112 \cdot 10^{-12} = \\ &1,13 \cdot 10^{-12} \Rightarrow \Delta b = 1,06 \text{ } \mu\text{m} \end{aligned}$$

Svar: Spaltvidden är $(101 \pm 1) \text{ } \mu\text{m}$

Genom att studera bidraget från de olika termerna ser vi att osäkerheten i spaltvidden nästan helt bestäms av osäkerheten i mätningen av avståndet mellan minimipunkterna.

Observera att vår felberäkning bara avser de slumpmässiga mätfeLEN. I formeln ovan har vi ju också gjort approximationen $\sin \theta \approx \tan \theta = x / (2 \cdot L)$, vilket kan leda till ett systematiskt fel, som vi får studera separat.

Exempel 6: Produkt - relativa fel

Låt $y = x \cdot z$ där x och z är experimentella variabler med feluppskattningarna Δx och Δz . Bestäm en feluppskattning av y .

Lösning

Felfortplantningsformeln ger:

$$(\Delta y)^2 = (\Delta x)^2 \cdot z^2 + (\Delta z)^2 \cdot x^2$$

Om vi nu tar roten på bägge sidor och dividerar med $y = x \cdot z$ får vi

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2}$$

Exempel 7: Kvot - relativa fel

Låt $y = x / z$ där x och z är experimentella variabler med feluppskattningarna Δx och Δz . Bestäm en feluppskattning av y .

Lösning

Felfortplantningsformeln ger:

$$(\Delta y)^2 = (\Delta x)^2 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^2 + (\Delta z)^2 \cdot \left(-\frac{x}{z^2}\right)^2$$

Om vi nu tar roten på bägge sidor och dividerar med $y = x / z$ får vi även i detta fallet

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2}$$

De allmänna resultaten i exempel 6 och 7 kan vi tolka (och minnas) i ord som att det **relativa felet** i en produkt eller en kvot beräknas som roten ur summan av de **relativa felen** i variablerna i kvadrat.

Exempel 8: Logaritmisk transformation

Vi avslutar med ytterligare en mycket vanlig situation. Låt $y = \ln(x)$ där x är en experimentell variabel med feluppskattningen Δx . Bestäm en feluppskattning av y .

Lösning

Felfortplantningsformeln ger:

$$(\Delta y)^2 = (\Delta x)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

dvs

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$$